Feuille 6
Convergences de variables aléatoires, théorèmes limites

Exercice 1 (Exemples)**.** *Donner des exemples :*

- *une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. r. qui converge en probabilité mais pas p.s.*
- *une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. r. qui converge dans L^p mais pas p.s et inversement.*
- *une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. r. qui converge en probabilité mais pas dans L^p.*
- *une suite (X_n) de v.a.r. qui converge en loi mais pas en probabilité.*

Exercice 2. Soit X_j des v.a. i.i.d. réelles intégrables, et $Y_j = \exp X_j$. Montrer que $\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right)^{\frac{1}{n}}$ converge p.s. vers une constante α que l'on calculera.

Exercice 3. Soit X_j des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(1,3)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+\cdots+X_n}{X_1^2+\cdots+X_n^2} = \frac{1}{4} \quad \text{p.s.}$$

Exercice 4 (Méthode de Monte Carlo de calcul d'une intégrale)**.**

(1) Soit h une fonction continue sur $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Montrez que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)$ converge p.s. vers $\int_0^1 h(x)dx$. Que se passe-t-il si h n'est pas continue ?

(2) Si de plus $\int_0^1 |h(x)|^2\,dx < +\infty$, majorez l'"erreur". $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i) - \int_0^1 h(x)dx\right|$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.

Commentaire : Le résultat de cet exercice est utilisé en pratique pour le calcul numérique d'intégrales de fonctions dont on ne connait pas de primitives explicites. On tire au hasard et de manière uniforme un grand nombre N de points X_i, $1 \le i \le N$ dans $[0,1]$. La quantité $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)$ nous donne une valeur approchée de l'intégrale cherchée.

Exercice 5. *Le théorème de la limite centrale est faux pour la CV en proba.*
Soit $(X_i)_i$ une suite de v.a.r iid telle que $E(X_1^2) < +\infty$. Montrer que $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_1)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}}$ ne converge pas en probabilités. (Raisonner par l'absurde en montrant que dans ce cas $U_{2n} - U_n$ ne converge pas vers 0 en probas.)

Exercice 6.

(1) Soit X_j des v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a. Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(2) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n)\left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7. Une urne contient 2 boules numérotées 0 et 2. On fait une suite de $n = 100$ tirages indépendants avec remise, et on note X_i le numéro de la boule tirée lors du i-ème tirage. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Indiquer le plus petit nombre positif α que vous puissiez trouver tel que $P(|S - 100| < \alpha) \ge 0.9$, d'abord à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebythev, puis du théorème de la limite centrale.

Exercice 8. Un restaurateur a été chargé de préparer un repas pour 1200 personnes, ce repas devant comporter deux types de menus, A et B. Une longue expérience lui a montré que devant un tel choix, une personne sur trois choisit le menu 1. Le restaurateur prévoit a menus A et b menus B. Quelle valeur minimale doit il donner à a s'il veut qu'il y ait une probabilité inférieure à 10% qu'il y ait un nombre insuffisant de menus A ? Même question pour les menus B ?

Exercice 9 (Type examen)**.** Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la suite de variable aléatoire

$$Y_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n.$$

(1) (*1 pt*) Exprimer $E(Y_n)$.
(2) (*1 pt*) Vérifier que $(1 + \frac{x}{n})^n \leq \exp(x)$.
(3) (*2 pts*) Dans le cas où $\lambda > 1$ montrer que $E(Y_n)$ converge vers une limite que l'on calculera en fonction de λ.
(4) (*2 pts*) Qu'en est-il de $\lim E(Y_n)$ lorsque $0 < \lambda \leq 1$? (*indication :* Lemme de Fatou)

Exercice 10 (Type examen)**.**
On cherche à donner une preuve probabiliste du théorème de Weierstrass (densité des polynômes parmi les fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ pour la convergence uniforme). Dans la suite, pour une fonction continue $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Soit $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le polynôme Q_n :

$$Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k}.$$

On considère une suite $(Y_j)_{j\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x \in [0, 1]$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$.

(1) Rappeler (sans preuve) la loi suivie par S_n. Donner l'espérance et la variance de la v.a. $\frac{S_n}{n}$.
(2) Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.
(3) Montrer que l'on peut écrire $Q_n(x) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = h(x).$$

(4) On veut montrer à présent que la convergence est uniforme. Pour cela, on fixe $\varepsilon > 0$ dans la suite. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $y, z \in [0, 1]$ avec $|y - z| < \delta$, on a $|h(y) - h(z)| < \varepsilon$.
(5) On fixe $\delta > 0$ comme à la question précédente. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left(\left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right|\right) = \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP + \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP,$$

et en déduire que la première intégrale $I_1 := \int_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq \delta\right\}} \left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right| dP$ satisfait $I_1 \leq \varepsilon$.
(6) Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(x)\right|\right) \leq \varepsilon + 2\|h\|_\infty P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right).$$

(7) Montrer que

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right\}\right) \leq \frac{x(1 - x)}{n\delta^2}$$

et que cette quantité tend vers 0 uniformément en x quand $n \to +\infty$. Conclure.